

課程常見問題

微積分預備課程：學科專業問題

(WeBWork Chapter4 : Problem16) 關於有理次方定義域之相關問題

Q1: 什麼情況下要確保底數大於等於零啊？當指數的絕對值小於 1 嗎？

(1 point) Library/ma117DB/set4/srw2_8_9.pg

The domain of the function

$h(x) = (x + 8)(x + 8)^2(2x - 2)^{1/4}$ is

[,]

If your answer is $-\infty$, enter -infinity; if your answer is ∞ , enter infinity.

A1：讓我們來釐清一下觀念。首先，整數次方。跟國中一樣，沒問題。

有理次方 $\frac{p}{q}$ ，我們視為 $\frac{1}{q} \times p$ ，也就是我們需要處理的是 $\frac{1}{q}$ 是什麼，剩下的 p 次方就是整數的 case。

在這裡， $\frac{1}{q}$ 就是 q 次方根，那我們偶次方定義在非負（你上面用“正”有點小錯）實數上；奇次方定義在全體實數上。

最後，實數次方 x^a ，我們就只定義在正的地方，規則是用有理數去逼近的方式。像是國中我們可以用 1.41424.... 去逼近 $\sqrt{2}$ ，那我們就用 $2^{1.414....}$ 的「極限」當作 $2^{\sqrt{2}}$ 。

因此，如果今天有個函數 $y = x^{\sqrt{2}}$ ，那麼它只會在非負區間有定義。同學可用 Desmo 做圖看看，基本上 Desmos 的定義域和習俗都是最廣為數學界使用的。

課程常見問題

微積分預備課程：學科專業問題

(Trigonometry(II) Quiz5-5-1) 如何化簡複雜的倍角公式

Q2: if $\cos^2(x)\sin^4(x) = A + B\cos(2x) + C\cos(4x) + D\cos(4x)$, then

$$(A, B, C, D) = ([A1], [A2], [A3], [A4])$$

請問我的方法是哪裡出現問題了呢？

題目：

If

$$\cos^2(x)\sin^4(x) = A + B\cos(2x) + C\cos(4x) + D\cos(2x)\cos(4x),$$

then

$$(A, B, C, D) = (\quad , \quad , \quad , \quad)$$

by 倍角公式 $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$A = \frac{-119}{16}, \quad B = -1, \quad C = \frac{-38}{4}, \quad D = -1$$

課程常見問題

微積分預備課程：學科專業問題

A2: 首先，你的做法很棒，雖然我沒有細看計算，但去年我的做法和你有關，具體來說是把計算方向反過來，如下。

令 $u = \cos^2(x)$ 。則

$$\sin^4(x) = (1 - u)^2$$

$$\cos(2x) = 2u - 1$$

$$\cos(4x) = 2\cos(2x)^2 - 1 = 2(2u - 1)^2 - 1$$

因為原式是一個恆等式，因此透過展開可知只要 $u \in [-1, 1]$ ，都有：

$$u(1 - u)^2 = A + B(2u - 1) + C(2(2u - 1)^2 - 1) + D(2u - 1)(2(2u - 1)^2 - 1)$$

然而，這是個 u 的多項式，因此左右兩式的係數必須相同（左右兩式相減有無窮多根，必為 0 多項式）。

比較 3 次項係數得 $D = \frac{1}{16}$ 。帶入 $0, 1, \frac{1}{2}$ 分別得

$$\begin{cases} 0 = A - B + C - D, & u = 0 \\ 0 = A + B + C + D, & u = 1 \\ \frac{1}{8} = A - C, & u = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{1}{16} \\ B = -\frac{1}{16} \\ C = -\frac{1}{16} \\ D = \frac{1}{16} \end{cases}$$

課程常見問題

微積分預備課程：學科專業問題

(WeBWork Chapter 5: Problem 1) 反三角函數計算

Q3: 請問這題要怎麼做？我把 $\sin$ 轉成 $\cos$ 後就沒有頭緒了...

(1 point) Library/Wiley/setAnton_Section_0.4/Question39.pg

Find the exact value.

$$\sin\left(2\cos^{-1}\left(\frac{9}{41}\right)\right) = \boxed{}$$

A3: 首先，我們可以先畫一個直角三角形。(如右圖)

注意到， $\arccos(\frac{9}{41})$ 是一個角度，什麼角度呢？

是那個 $\cos$ 一下會變成 $\frac{9}{41}$ 的角度，也就是圖中的 θ 。

至於為什麼第三邊是 40，其實只是根據畢氏定理。

接著，我們可以利用 $\sin$ 的二倍角公式，得到

$$2\sin(\cos^{-1}(\frac{9}{41}))\cos(\cos^{-1}(\frac{9}{41})) = 2 \times \frac{40}{41} \times \frac{9}{41} = \frac{720}{1681}$$

